CONCOURS EXTERNES DE RECRUTEMENT
DES INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE
C.F. ET C.T.

EPREUVE OPTIONNELLE DE MATHEMATIQUES Durée : 4 heures

Coef. : 2

NOTATIONS ET DEFINITIONS

R désigne l'ensemble des nombres réels ;

Z désigne l'ensemble des entiers relatifs ;

π représentant le nombre pi, on désigne par F l'ensemble des multiples de π, soit $F = \pi Z$, et par E le complémentaire de F dans **R**, soit $E = \mathbf{R} - \pi Z$;

C désigne le sous-ensemble de E formé par l'intervalle ouvert $]-\pi, \pi[$ privé de zéro ;

D désigne le sous-ensemble de E formé par le segment fermé $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ privé de zéro.

PROBLEME

1°) Montrer que la fonction $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ est bornée dans D.

2°) Montrer que, pour tout x appartenant à E, la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ vérifie :

$$4\, f(x) = f\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) .$$

3°) On pose $g(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x-k\pi)^2} + \frac{1}{(x+k\pi)^2}\right)$

a) Montrer que la fonction g est définie pour tout x de E.

b) Montrer que sur E, g est une fonction paire et de période π.

c) Montrer que pour tout x appartenant à E on a : $4\, g(x) = g\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + g\left(\frac{x}{2}\right)$

4°) Montrer que la fonction $g(x) - \frac{1}{x^2}$ est définie et bornée dans D.

5°) On désigne par h la fonction définie pour tout x de E par $h(x) = f(x) - g(x)$.

a) Montrer que h est bornée dans E.

b) Montrer que h vérifie pour tout x de E : $4\, h(x) = h\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + h\left(\frac{x}{2}\right)$

c) En déduire que pour tout x de E $h(x) = 0$.

A SUIVRE

6°) Montrer que pour tout x appartenant à D on a : $\operatorname{Cotg} x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2 \pi^2}$;

Montrer que cette égalité est également vraie pour tout x de E.

7°) A tout couple (n,p) d'entiers strictement positifs, on associe un réel positif au sens large : u_{np}

On suppose que pour tout n entier strictement positif la série $\sum_{p=1}^{+\infty} u_{np}$ est convergente et l'on note A_n sa somme : $A_n = \sum_{p=1}^{+\infty} u_{np}$

On suppose également que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ converge et l'on note S sa somme.

a) Montrer que pour tout p entier strictement positif la série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_{kp}$ converge.

b) On pose $B_p = \sum_{k=1}^{+\infty} u_{kp}$.

Montrer que la série $\sum_{p=1}^{+\infty} B_p$ converge et que $\sum_{p=1}^{+\infty} B_p = S$.

8°) Pour tout k, entier strictement supérieur à 1, on désigne par T(k) la somme de la série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$

a) Déterminer l'intervalle de convergence de la série entière $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{T(2p)}{\pi^{2p}} x^{2p-1}$.

b) Montrer que pour tout x appartenant à l'ensemble C on a :

$$\operatorname{Cotg} x - \frac{1}{x} = -2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{T(2p)}{\pi^{2p}} x^{2p-1}$$

9°) Montrer que la fonction tg x est développable en série entière sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et exprimer les coefficients de cette série entière en utilisant l'application T.

10°) Montrer que pour tout entier p strictement positif T(2p) est le produit de π^{2p} par un rationnel dont on donnera la valeur dans les seuls cas p=1, p=2, p=3.

FIN